Éléments de mathématiques pour la physique

JÉRÔME - - FILIO Paul

22 décembre 2024

Table des matières

1 Systèmes de coordonnées

1.1 Coordonnées cartésiennes

1.1.1 Vecteur position

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{\mathrm{u}_x} + y\overrightarrow{\mathrm{u}_y} + z\overrightarrow{\mathrm{u}_z}$$

1.1.2 Vecteur vitesse

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \dot{x}\overrightarrow{\mathrm{u}_x} + \dot{y}\overrightarrow{\mathrm{u}_y} + \dot{z}\overrightarrow{\mathrm{u}_z}$$

1.1.3 Vecteur accélération

$$\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{x}\overrightarrow{\mathrm{u}_x} + \ddot{y}\overrightarrow{\mathrm{u}_y} + \ddot{z}\overrightarrow{\mathrm{u}_z}$$

1.1.4 Différentielles des vecteurs de base

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{u}_x} &= \mathrm{d}x\overrightarrow{\mathrm{u}_x} \\
\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{u}_y} &= \mathrm{d}y\overrightarrow{\mathrm{u}_x} \\
\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{u}_z} &= \mathrm{d}z\overrightarrow{\mathrm{u}_z}
\end{aligned}$$

1.1.5 Déplacement élémentaire

$$\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}x\overrightarrow{\mathrm{u}_x} + \mathrm{d}y\overrightarrow{\mathrm{u}_y} + \mathrm{d}z\overrightarrow{\mathrm{u}_z}$$

1.1.6 Volume élémentaire

$$\boxed{\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$

1.2 Coordonnées cylindriques

1.2.1 Vecteur position

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{\mathrm{u}_r}$$

1.2.2 Vecteur vitesse

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\overrightarrow{\mathrm{u}_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{\mathrm{u}_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{\mathrm{u}_z}$$

1.2.3 Vecteur accélération

$$\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{\mathrm{u}_r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\overrightarrow{\mathrm{u}_\theta} + \ddot{z}\overrightarrow{\mathrm{u}_z}$$

1.2.4 Différentielles des vecteurs de base

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\overrightarrow{u_r} &= \mathrm{d}\theta\overrightarrow{u_\theta} \\
\mathrm{d}\overrightarrow{u_\theta} &= -\,\mathrm{d}\theta\overrightarrow{u_r} \\
\mathrm{d}\overrightarrow{u_z} &= \mathrm{d}z\overrightarrow{u_z}
\end{aligned}
$$

1.2.5 Déplacement élémentaire

$$\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}r\overrightarrow{u_r} + r\,\mathrm{d}\theta\overrightarrow{u_\theta} + \mathrm{d}z\overrightarrow{u_z}$$

1.2.6 Volume élémentaire

$$\boxed{\mathrm{d}\tau = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z}$$

1.2.7 Matrice de changement de base

$$P = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \overrightarrow{u_r} & \overrightarrow{u_\theta} & \overrightarrow{u_z} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \overrightarrow{u_x} \\ \overrightarrow{u_y} \\ \overrightarrow{u_z} \end{array} \end{array} \quad \text{avec } P^{-1} = P^{\top}$$

1.3 Coordonnées sphériques

$$\boxed{(\theta,\, \varphi) \in [0,\, \pi[\times[0,\, 2\pi[}$$

1.3.1 Vecteur position

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r}$$

1.3.2 Vecteur vitesse

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + r\sin(\theta)\dot{\varphi}\overrightarrow{u_\varphi}$$

1.3.3 Vecteur accélération

$$\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2} = \left(\ddot{r} - r\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta)\dot{\varphi}^2\right)\right)\overrightarrow{u_r} + \left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}(r^2\dot{\theta})}{\mathrm{d}t} - r\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\varphi}^2\right)\overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\sin^2(\theta)\dot{\varphi}\right)\overrightarrow{u_\varphi}$$

1.3.4 Différentielles des vecteurs de base

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\overrightarrow{u_r} &= \mathrm{d}\theta\overrightarrow{u_\theta} + \sin(\theta)\,\mathrm{d}\varphi\overrightarrow{u_\varphi} \\
\mathrm{d}\overrightarrow{u_\theta} &= -\,\mathrm{d}\theta\overrightarrow{u_r} + \cos(\theta)\,\mathrm{d}\varphi\overrightarrow{u_\varphi} \\
\mathrm{d}\overrightarrow{u_\varphi} &= -\,\mathrm{d}\varphi\left(\sin(\theta)\overrightarrow{u_r} + \cos(\theta)\overrightarrow{u_\theta}\right)
\end{aligned}
$$

1.3.5 Déplacement élémentaire

$$\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}r\overrightarrow{u_r} + r\,\mathrm{d}\theta\overrightarrow{u_\theta} + r\sin(\theta)\,\mathrm{d}\varphi\overrightarrow{u_\varphi}$$

1.3.6 Volume élémentaire

$$\boxed{\mathrm{d}\tau = r^2 \sin(\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi}$$

1.3.7 Matrice de changement de base

$$P = \begin{array}{cl} \begin{array}{ccc} \overrightarrow{u_r} & \overrightarrow{u_\theta} & \overrightarrow{u_\varphi} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) & \cos(\theta)\cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) & \cos(\theta)\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \\ \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \overrightarrow{u_x} \\ \overrightarrow{u_y} \\ \overrightarrow{u_z} \end{array} \end{array} \quad \text{avec } P^{-1} = P^{\top}$$

2 Vecteurs et différentiation

2.1 Opérateurs vectoriels

2.1.1 Nabla

$$\boxed{\overrightarrow{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{u_z}} \quad \text{en coordonnées cartésiennes}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\nabla} &= \frac{\partial}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{u_z} && \text{en coordonnées cylindriques} \\ &= \frac{\partial}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \varphi}\overrightarrow{u_\varphi} && \text{en coordonnées sphériques} \end{aligned}$$

2.1.2 Gradient

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}} f = \overrightarrow{\nabla} f}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{grad}} f &= \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{u_z} && \text{en coordonnées cartésiennes} \\ &= \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{\theta}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{u_z} && \text{en coordonnées cylindriques} \\ &= \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\overrightarrow{u_\varphi} && \text{en coordonnées sphériques} \end{aligned}$$

2.1.3 Divergence

$$\boxed{\mathrm{div}\,\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{A}}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\,\overrightarrow{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} && \text{en coordonnées cartésiennes} \\ &= \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_r)}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} && \text{en coordonnées cylindriques} \\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial (A_\theta \sin(\theta))}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} && \text{en coordonnées sphériques} \end{aligned}$$

2.1.4 Rotationnel

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A}}$$

2.1.5 Laplacien scalaire

$$\boxed{\Delta f = \overrightarrow{\nabla}^2 f = \operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}} f}$$

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} && \text{en coordonnées cartésiennes} \\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} && \text{en coordonnées cylindriques} \\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} && \text{en coordonnées sphériques}
\end{aligned}$$

2.1.6 Laplacien vectoriel

$$\boxed{\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\nabla}^2.\overrightarrow{A}}$$

2.1.7 Propriétés

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f\right) = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{\nabla} f = 0$$

$$\operatorname{div}\left(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\overrightarrow{A}\right) = \overrightarrow{\nabla}.\left(\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A}\right) = 0$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{A})) = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div}(\overrightarrow{A})) - \overrightarrow{\Delta}.\overrightarrow{A}$$

2.2 Différentielle d'une fonction de plusieurs variables

$$\boxed{\mathrm{d}f = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(f).\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}}$$

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z \quad \text{en coordonnées cartésiennes}$$

2.3 Circulation d'un champ vectoriel

Circulation d'un champ vectoriel $\overrightarrow{v}$ du point A au point B le long d'une courbe $\mathcal{C}$:

$$\boxed{\mathfrak{C} = \int_A^B \overrightarrow{v}.\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}}$$

2.3.1 Circulation le long d'une courbe fermée

$$\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{v}.\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{v}).\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

2.3.2 Circulation d'un champ de gradient

$$\int_A^B \overrightarrow{\operatorname{grad}}(f).\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = f(B) - f(A)$$

3 Équations différentielles

3.1 Équation différentielle linéaire d'ordre 1

$$y' + a(t)y = b(t)$$

$$y(t) = \left(\int b(t) e^{\int a(t)dt} dt + C \right) e^{-\int a(t)dt}$$

3.2 Équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

$$y'' + ay' + by = \varphi(t)$$

$$r^2 + ar + b = 0 \qquad (\mathcal{E}_c)$$

3.2.1 Solution de l'équation homogène dans $\mathbb{C}$

Si $(\mathcal{E}_c)$ admet deux solutions distinctes :

$$h(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

Si $(\mathcal{E}_c)$ admet une solution double :

$$h(x) = (C_1 x + C_2) e^{r_0 x}$$

3.2.2 Solution de l'équation homogène dans $\mathbb{R}$

Si $\Delta \geq 0$, voir ci-dessus dans $\mathbb{C}$. Si $\Delta < 0$, en posant $r = \alpha \pm i\beta$:

$$h(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$$

3.2.3 Quelques solutions particulières

Si $\varphi(x) = Ae^{\lambda x}$,

- $f_0(x) = C_0 e^{\lambda x}$ si λ n'est pas solution de $(\mathcal{E}_c)$
- $f_0(x) = C_0 x e^{\lambda x}$ si λ est solution simple de $(\mathcal{E}_c)$
- $f_0(x) = C_0 x^2 e^{\lambda x}$ si λ est solution double de $(\mathcal{E}_c)$

Si $\varphi(x) = B\cos(\omega x)$ (resp. sin), alors une solution particulière est obtenue en considérant la partie réelle (resp. imaginaire) d'une solution particulière de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = Be^{i\omega x}$.